La función ternaria de Cantor

Miguel Ángel García Álvarez

En el año 1884, Georg Cantor, utilizando el ahora denominado conjunto de Cantor, que él mismo había definido, mostró la existencia de funciones continuas, definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, que son constantes en un conjunto numerable de intervalos abiertos tales que el complemento, en $[a, b]$, de su unión, es un conjunto perfecto de números reales que tiene contenido cero, pero cuya imagen hace que esas funciones sean continuas. Al ejemplo específico que dio Cantor se le conoce ahora como la función ternaria de Cantor, o simplemente función de Cantor.

En probabilidad, ese tipo de funciones se utilizan para mostrar que existen funciones de distribución singulares; es decir, que son continuas, pero no absolutramente continuas.

La definición de la función de Cantor es como sigue:

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor, entonces cada $x \in \mathfrak{C}$ se puede expresar como una serie:

$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots,$

donde $a_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \in C$, definamos:

$\xi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right)$

Esta función $\xi : \mathfrak{C} \to [0, 1]$ es suprayectiva, ya que cualquier número real $z \in [0, 1]$ se puede expresar como una serie:

$z = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{d^2} + \frac{d_3}{3^3} + \cdots,$

donde $d_k \in \{0, 1\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

La sucesión $d_1, d_2, \ldots$ es única, excepto si z es un racional diádico, en cuyo caso z admite dos representaciones.

Además, cualquier sucesión $d_1, d_2, \ldots$, donde $d_k \in \{0, 1\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, representa un número real $z \in [0, 1]$; a saber:

$z = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{d^2} + \frac{d_3}{3^3} + \cdots$

Entonces, definiendo:

$x = 2\left(\frac{d_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots\right)$

x pertenece al conjunto de Cantor y $\xi(x) = z$.

ξ es no decreciente ya que si $x, y \in \mathfrak{C}$ y $x < y$, entonces, si, en los desarrollos en base 3 de x y y, el m-simo término es el primero que es distinto, ese término tiene que ser 0 para x y 2 para y; así que, si $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, 0, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$son los términos del desarrollo de x y $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, 2, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ los de y, se tiene:

$\xi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$,

$\xi(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$.

Por lo tanto:

$\xi(x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m}$,

$\xi(y) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m} \geq \xi(x)$.

Para definir ξ en todo el intervalo $[0,1]$, falta definirla en los intervalos abiertos que se suprimen del intervalo $[0,1]$ para formar $\mathfrak{C}$.

Los desarrollos en base 3 de los extremos de un intervalo que se suprime en el n-simo paso coinciden hasta el término $n-1$, y el término siguiente del extremo izquierdo del intervalo es cero, mientras que el del extremo derecho es 2. Así que, si (c,d) es uno de los intervalos que se suprimen en el paso n, se tiene:

$c = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0222\cdots$

$d = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2000\cdots$

Así que:

$\xi(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n}$,

$\xi(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right) + \frac{1}{2^n}$.

Por lo tanto, $\xi(c) = \xi(d)$.

Definamos $\xi(x) = \xi(c)$ para cualquier $x \in (c,d)$.

La función $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es no decreciente; así que, las discontinuidades de ξ únicamente pueden ser de saltos; pero, al ser ξ suprayectiva, no puede tener saltos. Por lo tanto, ξ es continua.

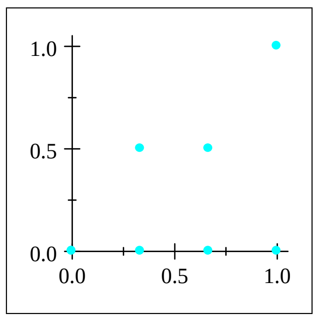
ξ es entonces una función continua y no decreciente, definida sobre el intervalo $[0,1]$ y con valores en el mismo intervalo.

Los valores de ξ en los racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor se pueden obtener de la siguiente manera:

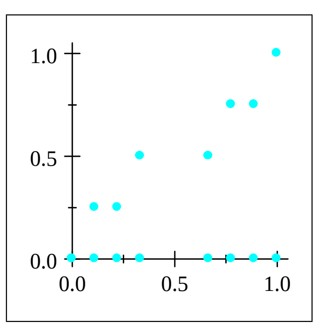
Consideremos la definición geométrica del conjunto de Cantor:

Se comienza con el intervalo $[0,1]$; de lo cual obtenemos dos de los racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor: 0 y 1, cuyas imágenes son 0 y 1, respectivamente.

El intervalo $[0,1]$ lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central; de manera que obtenemos dos nuevos racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor: $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, los cuales podemos escribirlos en base 3 como $0{,}0222\cdots$ y $0{,}2000\cdots$; así que sus imágenes son los racionales diádicos $0{,}0111\cdots$ y $0{,}1000\cdots$; los cuales son, ambos, iguales a $\frac{1}{2}$.

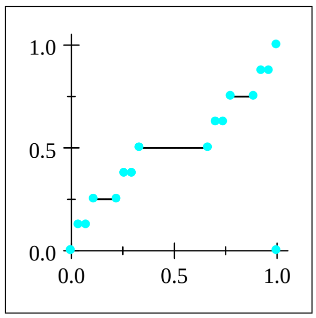


Repetimos el proceso para cada uno de los 2 intervalos cerrados que restan; cada uno de ellos lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central; de manera que obtenemos cuatro nuevos racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor: $\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{7}{3^2}$ y $\frac{8}{3^2}$, los cuales podemos escribirlos en base 3 como $0{,}00222\cdots$, $0{,}02000\cdots$, $0{,}20222\cdots$ y $0{,}22000\cdots$; así que sus imágenes son los racionales diádicos $0{,}00111\cdots$, $0{,}01000\cdots$, $0{,}10111\cdots$ y $0{,}11000\cdots$; los cuales son, los dos primeros iguales a $\frac{1}{2^2}$ y los dos últimos iguales a $\frac{3}{2^2}$.



Continuando con este proceso, en el n-simo paso obtenemos 2^n nuevos racionales triádicos, cuyo conjunto de imágenes está formado por los racionales diádicos $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}$. Éstos son los que se obtienen, como nuevos racionales diádicos, en el n-simo paso del proceso de definición de los racionales diádicos en el intervalo $[0,1]$, el cual consiste en comenzar dividiendo ese intervalo en dos intervalos de la misma longitud; después dividiendo cada uno de los dos intervalos que se forman en dos intervalos de la misma longitud y así sucesivamente.

Así que, la gráfica de ξ en la unión de las cerraduras de los intervalos que se eliminan hasta el n-simo paso de la definición geométrica del conjunto de Cantor es algo del tipo siguiente:



Recordemos que la imagen, bajo ξ, del conjunto de Cantor es todo el intervalo $[0,1]$ y que el conjunto de racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor es denso en ese conjunto; así que, siendo continua, los valores de ξ en los elementos del conjunto de Cantor quedan determinados por sus valores en los racionales triádicos que pertenecen al mismo.

La función ξ también se puede obtener como el límite de una sucesión de funciones continuas, lineales por pedazos, la cual converge uniformemente.

En efecto, si $0 = t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2^{n+1}} = 1$ son los racionales triádicos, ordenados en forma creciente, que pertenecen al conjunto de Cantor y que se han obtenido hasta el n-simo paso de la definición geométrica de $\mathfrak{C}$, definimos:

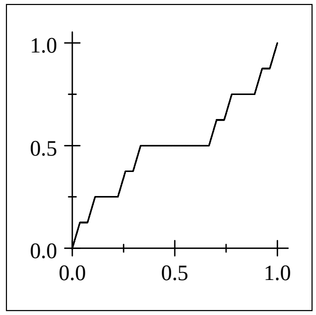
$\xi_n(x) = \frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^n(t_{2j}-t_{2j-1})}(x - t_{2j-1})$ si $x \in [t_{2j-1}, t_{2j}]$, para $j \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$

$\xi_n(x) = \frac{j}{2^n}$ si $x \in (t_{2j}, t_{2j+1})$, para $j \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$

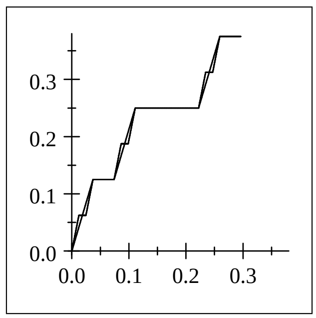
Tomando en consideración que t_{2j-1} y t_{2j} difieren en $\frac{1}{3^n}$, la primera expresión queda como sigue:

$\xi_n(x) = \frac{j-1}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^n (x - t_{2j-1})$ si $x \in [t_{2j-1}, t_{2j}]$, para $j \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$

En la figura siguiente se muestra la gráfica de ξ_3.



Cuando se pasa de ξ_n a ξ_{n+1}, cada segmento oblicuo se reemplaza por dos segmentos más inclinados, como se muestra en la siguiente figura; de manera que el valor absoluto de la diferencia entre $\xi_n(x)$ y $\xi_{n+1}(x)$ es menor que $\frac{1}{2^n}$ para cualquier $x \in [0,1]$.



Dada cualquier $\varepsilon > 0$ tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Entonces, para cualquier $x \in [0,1]$ y cualquier par de números naturales n y m tales que $m > n > N$, se tiene:

$$|\xi_n(x) - \xi_m(x)| \leq \left|\xi_n(x) - \xi_{n+1}(x)\right| + \left|\xi_{n+1}(x) - \xi_{n+2}(x)\right| + \cdots + \left|\xi_{m-1}(x) - \xi_m(x)\right|$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

Así que la sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en el intervalo $[0,1]$ y, por lo tanto, converge uniformente a una función g, la cual es continua ya que ξ_n es continua para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente g y ξ coinciden en todos los racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor y en el complemento del conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]$.

Finalmente, como el conjunto de racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor es denso en ese conjunto y tanto g como ξ son continuas, g y ξ coinciden en todo el intervalo $[0,1]$.

Obsérvese que la imagen inversa, bajo ξ, de un racional diádico en el intervalo $[0,1]$ es la cerradura de alguno de los intervalos que se eliminan en el proceso de definición del conjunto de Cantor.

Para obtener la imagen inversa, bajo ξ, de cada uno de los racionales diádicos se puede seguir el siguiente procedimiento:

Escribimos el racional diádico en consideración en base 2; por ejemplo, al escribir $\frac{5}{2^4}$ en base 2, obtenemos $0{,}010100\cdots$, o bien $0{,}010011\cdots$. Después multiplicamos por 2 cada uno de los dígitos de esos desarrollos para obtener los extremos, escritos en base 3, del intervalo que es la imagen inversa del racional diádico. Por ejemplo, al multiplicar por 2 los dígitos de los desarrollos en base 2 de $\frac{5}{2^4}$, obtenemos $0{,}020200\cdots$ y $0{,}020022\cdots$, los cuales son la representación en base 3 de $\frac{20}{81}$ y $\frac{19}{81}$, respectivamente; de manera que la imagen inversa, bajo ξ, de $\frac{5}{2^4}$, es el intervalo $\left[\frac{19}{81}, \frac{20}{81}\right]$.